**ESERCITAZIONE 3: esercizio 1**

Lorenzo Aliotta, 5655762

Riccardo Dal Seno, 5605031

Teresa de Jesus Fernandes, 4190022

**Testo**

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere, documento

Descrizione generata automaticamente

**Obiettivo dell'esperimento**

L'obiettivo dell'esercizio è stato quello di analizzare il comportamento degli autovalori di una matrice di Jordan A di dimensione n\*n e una matrice perturbata B = A + E, dove E è una matrice con tutti elementi nulli eccetto E(n, 1) = 2-n. Inoltre, lo studio è stato esteso alle matrici ATA e BTB, calcolando e confrontando gli autovalori di queste matrici.

**Descrizione del codice** (file: ‘esercitazione3\_1.m’)

Per risolvere i quesiti sono stati eseguiti i seguenti passaggi:

1. Calcolo di n  
   Il valore di n è stato determinato a partire dalla matricola della studentessa Teresa de Jesus Fernandes, con d0 e d1 rappresentanti l'ultima e la penultima cifra della matricola:  
     
   Matricola: 4190022  
   d0 = 2  
   d1 = 2  
   n = 10 \* (d1 + 1) + d0 = 10 \* (2 + 1) + 2 = 32
2. Creazione delle matrici A, B, AT e BT  
   La matrice A è stata costruita come un blocco di Jordan di dimensione 32\*32 con 1 sulla diagonale principale e sulla diagonale superiore mentre la matrice B è stata ottenuta aggiungendo la matrice E ad A, con E(n, 1) = 2-32

Grazie alle matrici A e B, è quindi possibile calcolare le matrici trasposte AT e BT grazie alla relativa formula

1. Determinazione degli autovalori delle matrici  
   Si osserva in questo caso che:
   1. Tutti gli autovalori della matrice A sono pari a 1 come da consegna e, poiché la diagonale superiore è composta di soli 1 e tutte le restanti componenti della matrice sono nulle, si conferma la struttura del blocco di Jordan
   2. Gli autovalori di B risultano complessi e distribuiti attorno al valore 1, indicando che la perturbazione introdotta dalla matrice E ha causato una variazione significativa negli autovalori

**Risultati dell'esperimento**

Il confronto degli autovalori delle matrici A e B evidenzia che, sebbene la perturbazione in termini di norma sia piccola, l'effetto sugli autovalori è piuttosto significativo; in particolare:

Immagine che contiene testo, Carattere, schermata, algebra

Descrizione generata automaticamente

Gli autovalori delle matrici ATA e BTB risultano invece molto simili (cioè con una differenza minima), indicando che il prodotto trasposto delle matrici è molto meno sensibile alla perturbazione rispetto agli autovalori delle matrici originali. Infatti:

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere

Descrizione generata automaticamente

Per il teorema di Bauer Fike, poiché la matrice AtA è diagonalizzabile, si ha che:

Dove:

,

Cioè la noma relativa della differenza tra gli autovalori della matrice è inferiormente limitata dal prodotto tra il condizionamento matriciale e la norma della differenza tra le matrici A e B.

Il teorema di Bauer Fike applicato alla norma 2 dice che

Pertanto, la variazione degli autovalori di una matrice diagonalizzabile dovuta a una perturbazione della matrice dipende da due fattori principali:

1. Grandezza della perturbazione
2. Numero di condizionamento della matrice di autovettori

In questo caso la differenza tra AtA e BtB è molto piccola e la matrice associata agli autovettori è ben condizionata; pertanto, grazie al teorema, possiamo affermare che anche la differenza tra gli autovalori delle due matrici è minima.

**Conclusioni**

Gli autovalori della matrice perturbata B si discostano notevolmente da quelli di A, nonostante una perturbazione molto piccola in termini di norma. Questo dimostra la sensibilità degli autovalori in presenza di piccole perturbazioni, specialmente in matrici con una struttura simile a quella dei blocchi di Jordan.

Le matrici ATA e BTB mostrano una “robustezza” molto maggiore agli effetti delle perturbazioni rispetto alle matrici originali, con differenze trascurabili negli autovalori.

Infine, i risultati sottolineano l'importanza di considerare attentamente le perturbazioni nelle matrici e come tali perturbazioni possano successivamente influire sui calcoli numerici, specialmente in applicazioni dove la precisione degli autovalori è cruciale. In particolare, l'analisi degli autovalori delle matrici trasposte può fornire una maggiore stabilità numerica, utile in determinati contesti